

LXVII олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 9 января 2020 года
IX класс

Время, отводимое для решения: 3 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Даны пять действительных чисел a , b , c , d и e . Среднее арифметическое этих пяти чисел равно 2, произведение чисел равно 1, а также $\frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab} = 8$. Найди произведение чисел $eabc$.

2. Даны целые числа a , b и c . Известно, что их сумма $a + b + c$ делится нацело на число 3. Покажи, что сумма $a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$ делится нацело на числа 2 и 3.

3. Длины сторон пятиугольника $ABCDE$ равны между собой и углы при вершинах C и D являются прямыми. Пусть точка P – есть точка пересечения диагоналей AC и BD . Покажи, что отрезки PA и PD имеют равные длины.

4. Даны два таких равнобедренных треугольника, что длина основания одного треугольника равна длине боковой стороны второго, а длина основания второго треугольника равна длине боковой стороны первого треугольника. Возможно ли, что периметр одного из этих треугольников больше периметра другого на 25%?

5. На доске записано число 2020. Во время каждого хода игры необходимо от числа, записанного на доске, отнять один из положительных делителей данного числа, затем стереть число, записанное на доске, и записать полученную разность. Проигрывает тот, кто записывает на доске число 0.

Катя и Миша ходят по очереди, причем первый ход делает Катя. Кто из игроков может гарантировать себе победу в игре и каким образом в этом случае должен он действовать?

Замечание. Делителями данного числа всегда являются число 1 и само число.